

CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE/ CATEDRELOR
DECLARATE VACANTE/ REZERVATE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
13 IULIE 2011

Probă scrisă la **MATEMATICĂ**

VARIANTA 2

Profesori

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

ЗАВДАННЯ І

(30 балів)

1. Для кожного ненульового натурального числа n позначаємо через a_n останню цифру числа $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.

56 a) Докажіть, що $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\forall n \geq 1$.

56 b) Обчисліть a_7 .

36 c) Докажіть, що ряд $(a_n)_{n \geq 1}$ є періодичним з періодом 20.

26 d) Обчисліть a_m для $m = 2011^{2011}$.

2. Дано гострокутний трикутник ABC і A' , B' , відповідно C' , середини малих дуг \widehat{BC} , \widehat{CA} , відповідно \widehat{AB} кола, описаного навколо трикутника ABC . Нехай I – центр кола, вписаного у трикутник ABC .

56 a) Доведіть, що прямі AA' , BB' і CC' перетинаються.

56 b) Докажіть, що трикутник BIA' є рівнобедрений.

36 c) Доведіть, що точка I є ортоцентр трикутника $A'B'C'$.

26 d) Доведіть, що $AI = IA'$, тоді і тільки тоді, якщо $r = R(1 - \cos A)$, де r є радіус кола, вписаного у трикутник ABC , а R є радіус кола, описаного навколо трикутника ABC .

ЗАВДАННЯ ІІ

(30 балів)

1. Дано множина $M = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

56 a) Перевірте, чи $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \in M$.

56 b) Докажіть, що, якщо $x, y \in M$, то $x + y - xy \in M$.

36 c) Дано $x = a + b\sqrt{5} \in M$, $x \neq 0$. Докажіть, що $\frac{1}{x} \in M$ тоді і тільки тоді, якщо $|a^2 - 5b^2| = 1$.

26 d) Докажіть, що існує нескінченна кількість елементів $x \in M$ так, що $\frac{1}{x} \in M$.

2. Дано функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$.

56 a) Докажіть, що будь-яка первісна функції f є строго зростаючою на \mathbb{R} .

56 b) Обчисліть $\int f(x) \sin x \, dx$, $x \in \mathbb{R}$.

36 c) Докажіть, що функція f не має границі на $+\infty$.

26 d) Обчисліть $\int_0^{2\pi} f(x) \, dx$.

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

Для гімназійної/ліцейної освіти, для підсумкового річного оцінювання складіть тест у письмовій формі разом із нормами перевірки та оцінювання з предмету/одного з предметів, з якого ви складаєте іспит.

Для отримання балів :

- вкажіть наступні елементи: предмет/модуль професійної підготовки, клас, розділи/теми та час роботи;
- складіть 2 питання типу пара, 2 питання з короткою відповіддю/з доповненням, 1 питання структурованого типу 1 питання типу есе/роз'язання задач;
- складіть норми, у яких 90 балів розподіляються для складених вами питань, і надаються 10 стартових балів.